§5. Неоднородное уравнение колебаний струны.

Интеграл Дюамеля

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения колебаний струны:

$$(1)\quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Здесь $f(x,t)$ – заданная функция $\equiv$ нормированная плотность внешних сил, действующих на струну, $f(x,t) \equiv \frac{1}{\rho} F(x,t)$.

Считаем, что $f(x,t) \not\equiv 0$.

Начальные условия взяты однородными, т.к. при наличии там функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, от них легко избавиться при помощи формулы Даламбера.

Получим разрешающую формулу для задачи Коши (1).

Зафиксируем параметр $\alpha \geq 0$ и составим вспомогательную задачу Коши со сдвинутым временем:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq \alpha, \\ v\big|_{t=\alpha} = 0, \quad v_t\big|_{t=\alpha} = f(x,\alpha). \end{cases}$$

Подробнее $v = v(x,t;\alpha)$, где

$$(2)\quad \begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq \alpha, \\ v(x,\alpha;\alpha) = 0, \quad v_t(x,\alpha;\alpha) = f(x,\alpha). \end{cases}$$

По формуле Даламбера

$$(3)\qquad v(x,t;\alpha)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\alpha)}^{x+a(t-\alpha)} f(s,\alpha)\,ds,\quad x\in\mathbb{R},\quad t\geq\alpha.$$

Составим теперь специальный интеграл Дюамеля:

$$(4)\qquad u(x,t)=\int\limits_0^t v(x,t;\alpha)\,d\alpha,\quad x\in\mathbb{R},\quad t\geq 0.$$

<u>NB</u> Формула (3) содержит условие $t\geq\alpha$. Поэтому $0\leq\alpha\leq t$, и определение интеграла (4) формально корректно.

Вычислим частные производные от интеграла (4). Имеем

$$u_t(x,t)=\underbrace{v(x,t;t)}_{\equiv 0\ \ (\text{см. }(2))}+\int\limits_0^t v_t(x,t;\alpha)\,d\alpha=\int\limits_0^t v_t(x,t;\alpha)\,d\alpha,$$

$$u_{tt}(x,t)=\underbrace{v_t(x,t;t)}_{\equiv f(x,t)\ \ (\text{см. }(2))}+\int\limits_0^t v_{tt}(x,t;\alpha)\,d\alpha=f(x,t)+\int\limits_0^t v_{tt}(x,t;\alpha)\,d\alpha,$$

$$u_{xx}(x,t)=\int\limits_0^t v_{xx}(x,t;\alpha)\,d\alpha.$$

Отсюда

$$u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=f(x,t)+\int\limits_0^t\underbrace{\Big(v_{tt}(x,t;\alpha)-a^2v_{xx}(x,t;\alpha)\Big)}_{\equiv 0\ \ (\text{см. }(2))}d\alpha=$$

$$=f(x,t)\quad\text{при } x\in\mathbb{R},\ t\geq 0.$$

Итак,

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t) \quad \text{при } x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

При этом

$$u(x,0) = \int_0^t v(x,t;\alpha)\,d\alpha \,\Big|_{t=0} \equiv 0 \quad \text{при } \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$u_t(x,0) = \int_0^t v_t(x,t;\alpha)\,d\alpha \,\Big|_{t=0} \equiv 0 \quad \text{при } \forall x \in \mathbb{R}.$$

<u>Вывод</u>: функция $u(x,t)$ из формулы (4) является решением задачи Коши (1).

Окончательно

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;\alpha)\,d\alpha = \int_0^t d\alpha \left(\frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\alpha)}^{x+a(t-\alpha)} f(s,\alpha)\,ds \right) =$$

$$= \{\alpha \mapsto \tau \text{ для красоты}\} = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds.$$

<u>Разрешающая формула</u> для задачи Коши (1):

$$(5) \quad \boxed{u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.}$$

Это и есть <u>интеграл Дюамеля</u> (в его явной записи).

Для полной корректности предыдущих выкладок ~~необходимо и~~ достаточно, чтобы функция $v(x,t;\alpha)$ из формулы (3) была классическим решением вспомогательной задачи Коши (2), непрерывно зависящим от параметра $\alpha \geq 0$. Вспоминая условия классической применимости формулы Даламбера (3), получаем требования $f,\ f_x \in C(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$.

<u>Теорема</u>. <u>Пусть</u> $f, f_x \in C(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$. <u>Тогда формула (5)</u> <u>определяет классическое решение задачи Коши (1), т.е.</u> $u \in C^{2,2}(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$, <u>и все соотношения в (1) выполнены.</u> $\square$

<u>NB</u> Здесь $f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$. Требование $f_x \in C(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$ может показаться завышенным (см. исходную задачу (1)). Но оно существенно, и просто отбросить его нельзя (см. пример в) ниже).

<u>Упражнение</u>. По формуле Дюамеля найти решения следующих задач Коши:

а) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + 1, & x\in\mathbb{R},\ t\geq 0, \\ u(x,0)=0, & u_t(x,0)=0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \cos x, & x\in\mathbb{R},\ t\geq 0, \\ u(x,0)=0, & u_t(x,0)=0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2|x|, & x\in\mathbb{R},\ t\geq 0, \\ u(x,0)=0, & u_t(x,0)=0. \end{cases}$

Будет ли решение в примере в) классическим?